INSTITUT NATIONAL DE LA STATISTIQUE ET DES ÉTUDES ÉCONOMIQUES

ÉCOLE NATIONALE DE LA STATISTIQUE ET DE L'ADMINISTRATION ÉCONOMIQUE

CONCOURS POUR L'ADMISSION D'ÉLÈVES TITULAIRES STATISTICIENS ÉCONOMISTES

OPTION MATHÉMATIQUES

JUIN 98

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

5 pages

Les parties I, II et III sont indépendantes.

NOTATIONS. Pour une suite réelle $(u_k)_{k\geq 1}$ la notation $\sup_{k\geq 1} u_k$ désigne $+\infty$ si la suite (u_k) n'est pas majorée et la borne supérieure de $\{u_k;\ k \geq 1\}$ si cette suite est majorée.

Pour deux entiers naturels $p \leq q$, on note $[[p, q]]$ l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à p et inférieurs ou égaux à q.

On note $\mathbf{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbf{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbf{R}$ l'ensemble des réels.

PARTIE I : Théorèmes de Baire et de Banach-Steinhaus.

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ normé complet. On notera $B(x, r)$ [resp. $\overline{B}(x, r)$] la boule ouverte [resp. fermée] de centre x et de rayon $r > 0$. On considère une suite $(O_n)_{n\geq 1}$ d'ouverts de E telle que, pour tout $n \geq 1$, l'adhérence $\overline{O}_n$ de O_n est égale à E (ainsi O_n est dense dans E).

1.a) Soit G un ouvert non vide de E. Montrer que l'on peut trouver une suite décroissante de boules $(B(x_n, \varepsilon_n))_{n\geq 1}$, c'est à dire

$$B(x_1, \varepsilon_1) \supset B(x_2, \varepsilon_2) \supset \cdots \supset B(x_n, \varepsilon_n) \supset \cdots$$

avec, pour tout $n \geq 1$,

$$0 < \varepsilon_n < \frac{1}{n} \text{ et } \overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subset G \cap \bigcap_{i=1}^{n} O_i.$$

1.b) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy.
1.c) Montrer que

$$G \cap \bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i \neq \emptyset.$$

1.d) Conclure que

$$\overline{\bigcap_{i=1}^{+\infty} O_i} = E.$$

2) On considère une suite $(L_k)_{k\geq 1}$ de formes linéaires continues sur E. On note $|||L|||$ la norme d'une forme linéaire continue L, c'est à dire

$$|||L||| = \sup_{\|x\|\leq 1} |L(x)|.$$

Pour tout $n \geq 1$, on note

$$V_n = \left\{ x \in E;\ \sup_{k\geq 1} |L_k(x)| > n \right\}$$

et

$$\Omega = \bigcap_{n=1}^{+\infty} V_n.$$

2.a) Pour tout $n \geq 1$, montrer que V_n est un ouvert de E.
2.b) Montrer que Ω est dense dans E si et seulement si pour tout $n \geq 1$, V_n est dense dans E.
2.c) Prouver que si ϕ est une forme linéaire sur E qui reste bornée sur une boule de rayon $\rho > 0$ et de centre z quelconque alors ϕ est continue et donner une majoration de sa norme.
2.d) On suppose que Ω n'est pas dense dans E. Montrer alors qu'il existe un réel M tel que pour tout $k \geq 1$, $|||L_k||| \leq M$. Que vaut Ω dans ce cas ?

PARTIE II : Permutation des termes d'une série.

1) Soit σ une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur $\mathbf{N}^*$ et $\sum v_n$ une série réelle absolument convergente. Montrer que la série $\sum v_{\sigma(n)}$ converge.

2) Soit $\sum w_n$ une série réelle convergente telle que $\sum |w_n|$ diverge.
2.a) Pour x réel on note $x^+ = \sup\{x, 0\}$ et $x^- = \sup\{-x, 0\}$. Exprimer x et $|x|$ en fonction de x^+ et x^-.
2.b) Quelles sont les natures des séries $\sum w_n^+$ et $\sum w_n^-$?
2.c) Montrer que l'on peut construire une bijection σ de $\mathbf{N}^*$ sur $\mathbf{N}^*$ et deux applications strictement croissantes φ et ψ de $\mathbf{N}^*$ dans $\mathbf{N}^*$ telles que, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} w_{\sigma(i)} \geq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{\psi(n)} w_{\sigma(i)} \leq -1.$$

On proposera un algorithme permettant de proche en proche la détermination des valeurs de σ et la construction de φ et de ψ.
2.d) Que peut on en déduire sur la nature de la série $\sum w_{\sigma(n)}$?

3) Dans cette question $(F, ||\cdot||_F)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbf{R}$ de dimension finie et $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de F. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge pour toute bijection σ de $\mathbf{N}^*$ sur $\mathbf{N}^*$ si et seulement si la série $\sum ||u_n||_F$ converge.

4) On suppose dans cette question que F désigne l'espace l^2 des suites réelles $v = (v(k))_{k\geq 1}$ telles que $\sum v(k)^2$ converge, muni de la norme

$$||v||_2 = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} v(k)^2\right)^{1/2}.$$

On pose, pour tous $n, k \in \mathbf{N}^*$,

$$\omega_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \neq k \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad k = n \end{cases}$$

4.a) Montrer que, pour toute bijection σ de $\mathbf{N}^*$ sur $\mathbf{N}^*$, la série $\sum \omega_{\sigma(n)}$ converge dans F.

4.b) Quelle est la nature de la série $\sum ||\omega_n||_2$? Ceci est-il en contradiction avec le résultat de la question 3) ?

PARTIE III : Espaces et opérateurs.

On suppose dorénavant que E désigne l'espace vectoriel des suites réelles $u = (u_k)_{k\geq 1}$ telles que $\sum u_k$ converge.

1) Montrer que la formule

$$||u|| = \sup_{k\geq 1} \left|\sum_{i=1}^{k} u_i\right|$$

définit une norme sur E.

2) On désigne par C l'espace vectoriel des suites réelles $v = (v_k)_{k\geq 1}$ convergentes, muni de la norme $||v||_\infty = \sup_{k\geq 1} |v_k|$.
2.a) Montrer que C est complet.
2.b) Construire une application linéaire continue de $(E, ||\cdot||)$ sur $(C, ||\cdot||_\infty)$ bijective et de réciproque continue.
2.c) L'espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ est-il complet ?

3) Soit σ une bijection de $\mathbf{N}^*$ sur $\mathbf{N}^*$ et $N \in \mathbf{N}^*$. On définit une forme linéaire sur E en posant

$$L(u) = \sum_{i=1}^{N} u_{\sigma(i)}.$$

3.a) On suppose que $1 \in \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$. On pose alors

$$\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\} = [[1, k_1']] \cup [[k_2, k_2']] \cup \ldots \cup [[k_p, k_p']]$$

avec $p \in \mathbf{N}^*$ et $1 \leq k_1' < k_2 - 1 < k_2 \leq k_2' < \cdots < k_p - 1 < k_p \leq k_p'$.
Montrer que L est continue et calculer sa norme

$$|||L||| = \sup_{||u||\leq 1} |L(u)|$$

en fonction de p.
3.b) Comment le résultat précédent est-il modifié lorsque $1 \notin \{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(N)\}$?

Dans la partie suivante on notera $p = p_N^\sigma$ pour rappeler que p dépend de σ et de N.

PARTIE IV : Synthèse

Cette partie utilise les résultats et les notations des parties I et III. En particulier la notation E désigne l'espace défini dans la partie III.

On cherche une caractérisation des bijections σ de $\mathbf{N}^*$ sur $\mathbf{N}^*$ vérifiant la propriété

$$(\mathcal{P}) \ : \ \forall (u_n)_{n\geq 1} \in E, \ (u_{\sigma(n)})_{n\geq 1} \in E$$

1) En utilisant les formes linéaires

$$L_N : \begin{cases} E & \to & \mathbf{R} \\ u = (u_k)_{k\geq 1} & \mapsto & \sum_{i=1}^{N} u_{\sigma(i)} \end{cases}$$

donner une condition nécessaire portant sur la suite $(p_N^\sigma)_{N\geq 1}$ (définie dans la partie III) pour que la bijection σ vérifie $(\mathcal{P})$.

2) Cette condition est-elle suffisante ?